

THÉORIE ÉCONOMÉTRIQUE
EXERCICES 10

***M*-ESTIMATEURS**

1. (a) Définissez la notion de *M*-estimateur.
(b) Expliquez la différence entre «*M*-estimateur » et «estimateur du maximum de vraisemblance».
2. (a) Donnez des conditions de régularité sous lesquelles un *M*-estimateur converge presque sûrement vers une constante.
(b) À quoi correspond cette constante ?
(c) Donnez des conditions de régularité sous lesquelles le *M*-estimateur a une distribution asymptotique normale et dérivez cette distribution. Précisez bien la matrice de covariance asymptotique du *M*-estimateur.
3. Peut-on établir la distribution asymptotique d'un estimateur du maximum de vraisemblance à partir de celle des *M*-estimateurs ? Précisez comment.
4. (a) Définissez ce qu'est un *M*-estimateur quasi-généralisé.
(b) Donnez une condition sous laquelle la distribution d'un *M*-estimateur quasi-généralisé ne dépend pas de la distribution asymptotique de l'estimateur de première étape (\tilde{c}_n).
(c) Quelle forme prend alors la matrice de covariance asymptotique du *M*-estimateur quasi-généralisé ?
5. Considérez le modèle de régression non linéaire :

$$Y_i = h(X_i, \beta_0) + u_i, \beta_0 \in \mathcal{B}$$
$$E(u_i | X_1, \dots, X_n) = 0$$
$$E(u_i^2 | X_1, \dots, X_n) = \omega^2(X_i, \beta_0) > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

où

H1 : les couples (Y_i, X_i) , $i = 1, \dots, n$ sont indépendants et identiquement distribués ;

H2 : \mathcal{B} est un ensemble compact ;

H3 : $h(X, \beta)$ est une fonction continue de β et

$$E[(Y_i - h(X_i, \beta))^2] < \infty, \forall \beta \in \mathcal{B};$$

H4 : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - h(X_i, \beta))^2$ converge presque sûrement et uniformément sur \mathcal{B} vers $E[(Y_i - h(X_i, \beta))^2]$.

- (a) Quand le paramètre β est-il identifiable au premier ordre ? Quand serait-il identifiable au second ordre ?
- (b) Si on suppose que β est identifiable au premier ordre, montrez que l'estimateur $\hat{\beta}_n$ obtenu en minimisant $\sum_{i=1}^n (Y_i - h(X_i, \beta))^2$ (estimateur des moindres carrés non linéaires) est convergent.
- (c) Si on suppose que β est identifiable au premier ordre, donnez des conditions de régularité sous lesquelles la distribution asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0)$ est normale. Explicitez la matrice de covariance asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0)$.
- (d) Trouvez un estimateur de β dont la variance asymptotique ne peut être inférieure à celle de $\hat{\beta}_n$.

Pour résoudre 5b et 5c, vous pouvez utiliser la théorie générale des M -estimateurs.

6. Exercice 8.3 dans Gouriéroux and Monfort (1989, chap. VIII, p. 297).
7. Exercice 8.4 dans Gouriéroux and Monfort (1989, chap. VIII, p. 297-298).

Références

GOURIÉROUX, C., AND A. MONFORT (1989) : *Statistique et modèles économétriques, Volumes 1 et 2*. Economica, Paris.