

**THÉORIE ÉCONOMÉTRIQUE**  
**EXERCICES 11**  
**TESTS FONDÉS SUR LA VRAISEMBLANCE**

1. Expliquez de façon intuitive les principes qui sous-tendent les tests de Wald, du score de Rao, du rapport de vraisemblance,  $C(\alpha)$  de Neyman, et de Hausman.
2. Soit  $(Y_i, X_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , des observations telles que la vraisemblance conditionnelle de  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  étant donné  $X = (X_1, \dots, X_n)'$  a la forme

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i | x_i, \theta)$$

où  $\theta$  est un vecteur  $p \times 1$  de paramètres. De plus, on suppose que les conditions de la propriété (7.58) [Gouriéroux and Monfort (1989, chap. VII)] sont satisfaites et on considère une hypothèse implicite  $H_0 : g(\theta) = 0$ , où  $g(\theta)$  est un vecteur  $r \times 1$  tel que la matrice  $\partial g / \partial \theta'$  est de rang  $r$  ( $1 \leq r \leq p$ ).

- (a) Dérivez la distribution asymptotique (sous  $H_0$ ) de la statistique de Wald pour tester  $H_0$ .
  - (b) Démontrez que ce test est convergent.
3. Sous les mêmes conditions que dans la question 2,
    - (a) décrivez la statistique du score de Rao pour tester  $H_0$  et montrez qu'elle est identique à la statistique du multiplicateur de Lagrange ;
    - (b) dérivez la distribution asymptotique de la statistique du score ;
    - (c) montrez que la statistique du score est asymptotiquement équivalente à la statistique de Wald (sous  $H_0$ ) ;
    - (d) donnez une condition suffisante sous laquelle le test du score est convergent.
  4. Sous les mêmes conditions que dans la question 2, montrez que les statistiques de Wald, du score de Rao et du rapport de vraisemblance sont asymptotiquement équivalentes sous  $H_0$ .
  5. Pour une hypothèse du type  $H_0 : \theta_1 = \theta_1^0$ , où  $\theta = (\theta_1', \theta_2')'$  et  $\theta_i$  est un vecteur  $p_i \times 1$  ( $i = 1, 2$ ), et sous les mêmes conditions que dans la question 2,

- (a) décrivez la statistique  $C(\alpha)$  de Neyman pour tester  $H_0$ ;
- (b) montrez que cette statistique est asymptotiquement équivalente (sous  $H_0$ ) à la statistique de Wald et dérivez de ce fait la distribution asymptotique de la statistique  $C(\alpha)$  sous  $H_0$ ;
- (c) décrivez comment on pourrait mettre en oeuvre un test  $C(\alpha)$  au moyen d'une régression artificielle.

## Références

GOURIÉROUX, C., AND A. MONFORT (1989) : *Statistique et modèles économétriques, Volumes 1 et 2*. Economica, Paris.