

Jean-Marie Dufour
21 janvier 2003

TECHNIQUES DE SÉRIES CHRONOLOGIQUES
EXERCICES
PROCESSUS STOCHASTIQUES 2

1. Discutez les conditions de convergence de la série

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$$

où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\} \sim BB(0, \sigma^2)$. En particulier,

- (a) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en moyenne d'ordre 2 ;
- (b) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en moyenne d'ordre $r > 0$;
- (c) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge presque sûrement ;
- (d) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en probabilité.

2. Considérez le modèle $MA(1)$ suivant :

$$X_t = \bar{\mu} + u_t - \theta u_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où $u_t \sim WN(0, \sigma^2)$ et $\sigma^2 > 0$.

- (a) Prouvez que la première autocorrélation de ce modèle ne peut être plus grande que 0.5 en valeur absolue.
 - (b) Trouvez les valeurs des paramètres de ce modèle pour lesquelles la borne supérieure est atteinte.
3. Soit $\{x_t : t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $MA(q)$. Pour $q = 3, 4, 5, 6$, vérifiez si les inégalités suivantes sont correctes :
- (a) $|\rho(1)| \leq 0.75$;
 - (b) $|\rho(2)| \leq 0.90$;
 - (c) $|\rho(3)| \leq 0.90$;

(d) $|\rho(4)| \leq 0.90$;

(e) $|\rho(5)| \leq 0.90$;

(f) $|\rho(6)| \leq 0.90$.

4. Considérez les processus suivants, où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc *i.i.d.* $N(0, 1)$

(1) $X_t = 0.5 X_{t-1} + u_t$,

(2) $X_t = 10 - 0.75 X_{t-1} + u_t$,

(3) $X_t = 10 + 0.7 X_{t-1} - 0.2 X_{t-2} + u_t$,

(4) $X_t = 10 + u_t - 0.75 u_{t-1} + 0.125 u_{t-2}$,

(5) $X_t = 0.5 X_{t-1} + u_t - 0.25 u_{t-1}$,

(6) $X_t = 0.5 X_{t-1} + u_t - 0.5 u_{t-1}$,

Pour chacun de ces processus, répondez aux questions suivantes :

(a) Ce processus est-il stationnaire ? Pourquoi ?

(b) Ce processus est-il inversible ? Pourquoi ?

(c) Calculez

i) $E(X_t)$;

ii) $\gamma(k)$, $k = 1, 2, \dots, 8$;

iii) $\rho(k)$, $k = 1, 2, \dots, 8$.

(d) Graphez $\rho(k)$.

(e) Quels sont les coefficients de $u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3}$ et u_{t-4} dans la représentation moyenne mobile de X_t .

(f) Trouvez la fonction génératrice des autocovariances de X_t .

(g) Graphez la densité spectrale de X_t .

(h) Calculez les quatre premières autocorrélations partielles de X_t .