

Université de Montréal
ECN 6238
Économétrie des séries chronologiques
Examen intra-semestriel

Aucune documentation permise
Calculatrice permise
Durée : 3 heures

20 points 1. Répondez par VRAI, FAUX ou INCERTAIN à chacune des assertions suivantes, et justifiez brièvement votre réponse. (Maximum : une page par assertion.)

- (1) Tout processus stationnaire au sens strict est dans L_2 .
- (2) Tout processus stationnaire au sens strict est aussi stationnaire du second ordre.
- (3) Tout processus stationnaire d'ordre 3 est aussi stationnaire d'ordre 2.
- (4) Tout processus asymptotiquement stationnaire d'ordre 3 est aussi asymptotiquement stationnaire d'ordre 2.
- (5) Un bruit blanc est un processus stationnaire d'ordre 4.

15 points 2. Soit le processus

$$X_t = \sum_{j=1}^m [A_j \cos(\nu_j t) + B_j \sin(\nu_j t)], \quad t \in \mathbb{Z},$$

où ν_1, \dots, ν_m sont des constantes distinctes dans l'intervalle $[0, 2\pi)$ et $A_j, B_j, j = 1, \dots, m$, sont des *v.a.'s* dans L_2 , telles que

$$\begin{aligned} E(A_j) &= E(B_j) = 0, \quad E(A_j^2) = E(B_j^2) = \sigma_j^2, \quad j = 1, \dots, m, \\ E(A_j A_k) &= E(B_j B_k) = 0, \quad \text{pour } j \neq k, \\ E(A_j B_k) &= 0, \quad \forall j, k. \end{aligned}$$

- (a) Démontrez que ce processus est stationnaire d'ordre 2.
- (b) Pour le cas où $m = 1$, démontrez que ce processus est déterministe.

40 points 3. Considérez le processus suivants, où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc *i.i.d.* $N(0, 1)$:

$$X_t = 0.5 X_{t-1} + u_t - 0.5 u_{t-1} \quad (1)$$

Répondez aux questions suivantes :

- (a) Ce processus est-il stationnaire ? Pourquoi ?
- (b) Ce processus est-il inversible ? Pourquoi ?
- (c) Calculez
 - i) $E(X_t)$;
 - ii) $\gamma(k)$, $k = 1, 2, \dots, 8$;
 - iii) $\rho(k)$, $k = 1, 2, \dots, 8$.
- (d) Graphez $\rho(k)$.
- (e) Quels sont les coefficients de $u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3}$ et u_{t-4} dans la représentation moyenne mobile de X_t .
- (f) Trouvez la fonction génératrice des autocovariances de X_t .
- (g) Graphez la densité spectrale de X_t .
- (h) Calculez les quatre premières autocorrélations partielles de X_t .

25 points 4. Soit X_1, X_2, \dots, X_T une série chronologique.

- (a) Définissez :
 - i. les autocorrélations échantillonnales de cette série ;
 - ii. les autocorrélations partielles échantillonnales de cette série.
- (b) Discutez les distributions asymptotiques de ces deux ensembles d'autocorrélations dans les deux cas suivants :
 - i. sous l'hypothèse où X_1, X_2, \dots, X_T sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) ;
 - ii. sous l'hypothèse où le processus suit une moyenne mobile d'ordre fini.
- (c) Décrivez comment vous identifieriez le processus décrit à l'équation (1) de la question 3.