Jean-Marie Dufour
7 mars 2006

Université de Montréal
ECN 6238
Économétrie des séries chronologiques
Examen intra-semestriel

Aucune documentation permise
Calculatrice permise
Durée : 3 heures

10 points 1. Démontrez que la fonction d'autocovariance d'un processus stochastique stationnaire du second ordre (sur les entiers) est nécessairement paire et positive semi-définie.

10 points 2. Discutez les conditions de convergence de la série

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$$

où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\} \sim BB(0, \sigma^2)$. En particulier,

(a) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en moyenne d'ordre 2 ;

(b) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en moyenne d'ordre $r > 0$;

(c) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge presque sûrement ;

(d) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ converge en probabilité.

40 points 3. Considérez le processus suivants, où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc $i.i.d.$ $\mathrm{N}(0,1)$:

$$X_t = 10 + 0.7\, X_{t-1} - 0.2\, X_{t-2} + u_t\,.$$

Répondez aux questions suivantes :

(a) Ce processus est-il stationnaire ? Pourquoi ?

(b) Ce processus est-il inversible ? Pourquoi ?

(c) Calculez

i) $E(X_t)$;

ii) $\gamma(k)\,,\ k = 1, 2, \ldots , 8$;

iii) $\rho(k)\,,\ k = 1, 2, \ldots , 8$.

(d) Graphez $\rho(k)$.

(e) Quels sont les coefficients de u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3} et u_{t-4} dans la représentation moyenne mobile de X_t.

(f) Trouvez la fonction génératrice des autocovariances de X_t.

(g) Graphez la densité spectrale de X_t.

(h) Calculez les quatre premières autocorrélations partielles de X_t.

20 points 4. Soit $X_1, X_2, \ldots , X_T$ une série chronologique stationnaire du second ordre telle que

$$X_t = 10 + u_t - 0.5\, u_{t-1} \tag{0.1}$$

où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc $i.i.d.$ $\mathrm{N}(0, 1)$.

(a) Si $X_T = 11$, $X_{T-1} = 9$, et $X_{T-2} = 12$, calculez les meilleures prévisions linéaires (au sens de l'erreur quadratique moyenne) de X_{T+1}, X_{T+2} et $X_{T+3.}$.

(b) Si $X_T = 11$, $X_{T-1} = 9$, et $X_{T-2} = 12$, calculez les meilleures prévisions (au sens de l'erreur quadratique moyenne, sans imposer la condition de linéarité) de X_{T+1}, X_{T+2} et $X_{T+3.}$.

20 points 5. Soit $X_1, X_2, \ldots , X_T$ une série chronologique.

(a) Définissez les autocorrélations échantillonnales de cette série.

(b) Discutez les distributions asymptotiques de ces autocorrélations :

i. pour un processus stationnaire général ;

ii. sous l'hypothèse où $X_1, X_2, \ldots , X_T$ sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).

(c) On vous demande de tester l'hypothèse que $X_1, X_2, \ldots , X_T$ sont i.i.d. Décrivez une procédure exacte pour ce faire.